EPITA

Mathématiques

Examen S2-B3-APEF

Polynômes, équations différentielles, fonctions

durée : 2 heures

Mars 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : polynômes (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $P_1(X) = 2X^2 - X^3 + 6X^4 + 3X^6$. Sans utiliser la notion de dérivée, montrer que 0 est une racine de P_1 et trouver son ordre exact de multiplicité. Justifier.

2. Soit $P_2(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 - 8X^2 - 19X - 10$. **On admet que 2 est une racine simple de P_2.**

   (a) Montrer que -1 est une racine de P_2 et trouver son ordre exact de multiplicité, noté α.

   (b) Expliquer pourquoi le reste de la division euclidienne de P_2 par $(X-2)(X+1)^\alpha$ est nul puis effectuer cette division.

(c) En déduire l'écriture de P_2 comme produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. Justifier dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : équations différentielles (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle (E) $y'' - 6y' + 9y = 3$.

   (a) Trouver une solution particulière (évidente) de (E).

   (b) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

2. Résoudre, dans $]0, \pi[$, (E) : $\sin(x)y' - \cos(x)y = x\sin^2(x)e^{-x^2}$.

Exercice 3 : étude locale de fonctions (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ne s'y annulant pas. Donner deux définitions mathématiques de chacune des notations suivantes : $f = o(g)$ et $f \sim g$ au voisinage de x_0.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Donner un équivalent en 0 ET en $+\infty$ de $P(x) = -x^4 + x^2 - 3x$.

   .....
   .....

3. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 : $f(x) = 2x - x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2 - 3x^2 + x^3 + o(x^3)$.
   (a) Donner un équivalent en 0 de f. Justifier brièvement en repartant de la définition.

   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Donner un équivalent en 0 de g.

   .....

   (c) Donner un équivalent en 0 de $h(x) = f(x) \times g(x)$.

   .....

   (d) Donner un équivalent en 0 de $k(x) = f(x) - xg(x)$.

   .....
   .....
   .....
   .....

4. Soit f une fonction dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$, telle qu'au voisinage de 0, $f(x) = 2x + 6x^3 + o(x^3)$.
   (a) Remplacer les pointillés :

   $f(x) = \ldots\ldots + o(x^2)$, $\quad xf(x) = \ldots\ldots + o(x^3)$, $\quad xf(x) = \ldots\ldots + o(x^4)$

   (b) Donner $f(0)$ ainsi que toutes les dérivées successives de f en 0 que l'énoncé permet de connaitre.

   .....
   .....

Exercice 4 : développements limités (6 points)

1. Soient $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$.

   (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de f.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de g.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Soit $h : x \longmapsto \ln(1+\cos(x))$.

   (a) Quel sera le premier terme du développement limité de h en 0 ?

   .....

   (b) Trouver le développement limité de h en 0 à l'ordre 4 après avoir pris soin de rappeler les DL des fonctions usuelles utilisées.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

[Suite des pointillés au dos et dernier exercice !]

Exercice 5 : calcul de limites (4 points)

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2\sin(x) - 1}{1 - \sqrt{1-x}}$. **Vous prendrez soin de votre rédaction.**

2. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$. **Vous prendrez soin de votre rédaction.**