SUITES
THÉORÈMES DE CONVERGENCE

1 Cas des suites convergentes ou monotones

Proposition 1 *1. Toute suite convergente est bornée.*

2. Toute suite croissante et majorée est convergente.

3. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

4. Toute suite croissante, non majorée tend vers $+\infty$.

5. Toute suite décroissante, non minorée tend vers $-\infty$.

2 Suites adjacentes

Définition 1 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :*

1. *(u_n) est croissante.*
2. *(v_n) est décroissante.*
3. *$\lim\limits_n (v_n - u_n) = 0$.*

Théorème 1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers une même limite ℓ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 2 *Soit (u_n) une suite. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n), toute suite du type $(u_{(\varphi(n))}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 2 *Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \to \ell$. Alors, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.*

Corollaire 1 *Soit (u_n) une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Théorème 2 *(Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée, on peut extraire une sous suite convergente.*