PROBABILITÉS

1 Espace probabilisé

Proposition (Propriétés d'une probabilité).

Soit $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\right)$ *un espace probabilisé.*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. *Si* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, *l'application* P *est entièrement définie par les valeurs* $P(\{\omega_1\})$, $P(\{\omega_2\})$, ...,$P(\{\omega_n\})$.
3. $\forall (A, B) \in \left[\mathcal{P}(\Omega)\right]^2$, $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$.
4. $\forall (A, B) \in \left[\mathcal{P}(\Omega)\right]^2$, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Conseil méthode : vous êtes déjà familier de ces propriétés. Le but ici est de voir qu'elles se démontrent à partir des axiomes définissant une fonction de probabilité.

Preuve :
On sait que, par définition d'une fonction de probabilité :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour tout $(A, B) \in \left[\mathcal{P}(\Omega)\right]^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$,
$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$$

Démontrons maintenant les quatre propriétés une par une.

1. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $A \cap \emptyset = \emptyset$. Ainsi, en utilisant la seconde propriété de la fonction P, il vient :
$$P(A \sqcup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$
Or $A \sqcup \emptyset = A$. Donc
$$P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$
qui implique : $P(\emptyset) = 0$.

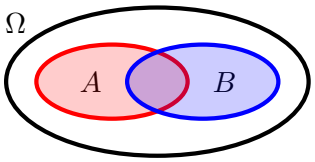
2. Il s'agit de démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, la valeur de $P(A)$ peut être déterminée. Donnons-nous donc $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Comme Ω est un ensemble fini, $A \subset \Omega$ l'est aussi. On peut donc énumérer ses éléments et écrire A sous la forme
$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \qquad \text{avec} \qquad \text{Card}(A) = p$$
Alors A peut s'écrire comme l'union disjointe
$$A = \{x_1\} \sqcup \{x_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{x_p\}$$
Ainsi, en utilisant la seconde propriété de la fonction P,
$$P(A) = P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \cdots + P(\{x_p\})$$

3. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. A peut s'écrire comme l'union disjointe

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$$

Ainsi,

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$



4. Soit $(A, B) \in \left[\mathcal{P}(\Omega)\right]^2$. L'ensemble $A \cup B$ peut s'écrire comme l'union disjointe

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

Ainsi,

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

Par ailleurs, d'après la propriété 3,

$$\begin{cases} P(A) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \end{cases}$$

En ajoutant ces deux relations, il vient :

$$P(A) + P(B) = \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)}_{P(A \cup B)} + P(A \cap B)$$

Ainsi, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

2 Espérance et variance

Théorème (**Espérance de** $aX + b$)**.** *Soient X une variable aléatoire finie et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors* $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.

Preuve :

Soient X une variable aléatoire finie et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et considérons la variable aléatoire $Y = aX + b$.

Cette variable aléatoire est de la forme $Y = f(X)$ où f est la fonction $x \longmapsto ax + b$. Ainsi, d'après une proposition énoncée (et démontrée) dans une des vidéos,

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} P(X{=}x_i) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X{=}x_i)(a\,x_i + b\,)$$

Or pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad P(X{=}x_i)(a\,x_i + b) = a\,P(X{=}x_i)\,x_i + b\,P(X{=}x_i)$. Ainsi,

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \Big(a\,P(X{=}x_i)\,x_i + b\,P(X{=}x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(a\,P(X{=}x_i)\,x_i\Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(b\,P(X{=}x_i)\Big)$$

Dans cette dernière expression, on peut factoriser a dans la première somme et b dans la seconde. On obtient :

$$\mathrm{E}(Y) = a \sum_{i=1}^{n} P(X{=}x_i)\,x_i \quad + \quad b \sum_{i=1}^{n} P(X{=}x_i)$$

Or ici, la première somme vaut $\mathrm{E}(X)$, la seconde vaut 1. Finalement,

$$\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

Théorème (**Propriétés de la variance**). *Soient X une variable aléatoire finie et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$,
2. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Preuve :

Soient X une variable aléatoire finie et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrons ces deux propriétés une à une.

1. On sait que, par définition, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right)$.

   Or $\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\,\mathrm{E}(X)X + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$.

   Ainsi, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2 - 2\,\mathrm{E}(X)X + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2\right)$.

   On peut maintenant utiliser une propriété de l'espérance, énoncée dans une des vidéos mais pas démontrée ici : si X et Y sont deux variables aléatoires finies, alors

   $$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$$

   En appliquant cette propriété à la dernière expression de $\mathrm{Var}(X)$, on déduit que

   $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}\left(2\,\mathrm{E}(X)\,X\right) + \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{E}(X)\right)^2\right)$$

   Dans cette expression, on remarque que :

   (a) $2\,\mathrm{E}(X)\,X$ est une variable aléatoire de la forme $aX+b$ avec $a = 2\,\mathrm{E}(X)$ et $b = 0$. En effet, $\mathrm{E}(X)$ doit être considérée comme une constante. Elle dépend de la **loi** de X mais pas de la **valeur** de X. Si on tire X aléatoirement plusieurs fois, X prend des valeurs différentes mais $\mathrm{E}(X)$ ne varie pas.

   Ainsi, $\mathrm{E}\left(2\,\mathrm{E}(X)\,X\right) = 2\,\mathrm{E}(X)\;\mathrm{E}(X) = 2\left(\mathrm{E}(X)\right)^2$.

   (b) $\mathrm{E}\left(\left(\mathrm{E}(X)\right)^2\right)$ est l'espérance de la variable $\left(\mathrm{E}(X)\right)^2$ qui est une variable constante. Son espérance a donc la valeur de cette constante, c'est-à-dire que :

   $$\mathrm{E}\left(\left(\mathrm{E}(X)\right)^2\right) = \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$$

   De ces deux remarques, on déduit que

   $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\left(\mathrm{E}(X)\right)^2 + \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$$

2. Pour démontrer la propriété 2, on commence par écrire la définition de la variance de $aX+b$:

   $$\mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{E}\left(\left((aX+b) - \mathrm{E}(aX+b)\right)^2\right)$$

   Or, comme $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$, on a

   $$(aX+b) - \mathrm{E}(aX+b) = aX + b - a\,\mathrm{E}(X) - b = a\left(X - \mathrm{E}(X)\right)$$

   D'où

   $$\mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{E}\left(a^2\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right) = a^2\;\mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right)$$

   Mais l'espérance qui apparait dans la dernière expression ci-dessus est justement la variance de X.

   Ainsi, $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\;\mathrm{Var}(X)$.