PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

VARIABLES ALÉATOIRES

$\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\big)$ désigne un espace probabilisé fini.

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Définition

Une variable aléatoire X est une fonction

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

On peut alors définir $X(\Omega)$, qui est l'ensemble des valeurs possibles prises par X, et la loi de probabilité

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X{\in}B) \end{aligned}$$

Le triplet $\Big(X(\Omega), \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big), P_X\Big)$ est un espace probabilisé.

1.2 Loi de X

La loi de la variable aléatoire X est donnée par

1. l'ensemble $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,
2. les valeurs $P(X{=}x_1)$, $P(X{=}x_2)$, $\cdots$, $P(X{=}x_n)$

On peut aussi la définir par la fonction de répartition $F_X(x) = P(X{\leqslant}x)$.

2 Espérance et variance d'une variable aléatoire X

2.1 Définition

L'espérance de X est

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X{=}x_i)$$

La variance et l'écart type de X sont

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - \mathrm{E}(X)\big)^2\, P(X{=}x_i) \\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \end{aligned}$$

2.2 Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a

1. $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$
2. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
3. $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, P(X{=}x_i)$
4. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$
5. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$
6. Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

3 Exemples de lois

3.1 Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. La variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{l} P(X{=}1) = p \\ P(X{=}0) = 1-p \end{array} \right.$$

Son espérance et sa variance sont

$$\mathrm{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

On note : $X \rightsquigarrow \mathrm{Bernoulli}(p)$.

3.2 Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X_1, \cdots, X_n$, n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Posons

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \text{nombre de } X_i \text{ qui valent } 1$$

Alors Y suit une loi binomiale de paramètres n et p. On note : $Y \rightsquigarrow \mathrm{B}(n,p)$.

On a alors

$$\left| \begin{array}{l} Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ \forall k \in [\![0,n]\!], P(Y{=}k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{rl} \mathrm{E}(Y) & = np \\ \mathrm{Var}(Y) & = np(1-p) \end{array} \right.$$