SUITES NUMÉRIQUES
COMPARAISONS ASYMPTOTIQUES

Définition 1 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

1. *On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) et on écrit $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \varepsilon_n v_n$.*

   En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

   $$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. *On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) et on écrit $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite (b_n) bornée telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = b_n v_n$.*

   En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

   $$u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

3. *On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on écrit $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (k_n) de limite 1 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = k_n v_n$.*

   En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

   $$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque 1

1. $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$ *et* $u_n \sim v_n \implies u_n = O(v_n)$.
2. $u_n = o(1)$ *signifie que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $u_n \sim 0$ *signifie que la suite* (u_n) *est nulle à partir d'un certain rang.*
4. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors les suites* (u_n) *et* (v_n) *ont la même limite.*

Proposition 1 *Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) quatre suites ne s'annulant jamais telles que*

$$u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim x_n$$

Alors,

1. $u_n w_n \sim v_n x_n$ *et* $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.
2. $|u_n| \sim |v_n|$.
3. *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
4. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}^*$. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff u_n \sim \ell$.