PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

ESPACE PROBABILISÉ

Une expérience aléatoire conduit à un résultat incertain $\omega \in \Omega$. L'ensemble Ω est supposé fini: $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.

1 Définitions

1.1 Univers et évènements

- L'ensemble Ω est «l'univers des possibles».
- Un «évènement» A est un sous ensemble de Ω. Attribuer une probabilité à cet évènement consiste à donner une valeur numérique à la probabilité que le résultat de l'expérience soit dans A.
- Un «évènement élémentaire» est un évènement ne contenant qu'un seul élément. On dit aussi que c'est un «singleton».
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω. C'est donc l'ensemble de tous les évènements.
- Des évènements $(A_1, \cdots, A_p)$ sont «disjoints deux à deux» si, pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Ils forment une «partition» de Ω s'ils sont disjoints deux à deux et si leur union est Ω:

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{p} A_i$$

  Dans ce cas là, tout élément $\omega \in \Omega$ est dans un et un seul des A_i.

1.2 Fonction de probabilité

Étant donné un ensemble Ω fini, une probabilité est une fonction

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

qui vérifie:

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout couple d'évènements **disjoints** $(A, B) \in \left[\mathscr{P}(\Omega)\right]^2$,

$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$$

Le triplet $\left(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\right)$ est un «espace probabilisé».

2 Propriétés

Considérons un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P\right)$ et un couple d'évènements $(A, B) \in \left[\mathscr{P}(\Omega)\right]^2$. Alors

- $P(\emptyset) = 0$
- La fonction P est entièrement déterminée par ses n valeurs $P\big(\{\omega_1\}\big), \cdots, P\big(\{\omega_n\}\big)$
- $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
- $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Un cas particulier fréquent est celui où les évènements élémentaires sont équiprobables. Dans ce cas, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$