PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Définitions

1.1 Probabilité conditionnelle

Étant donnés deux évènements $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(B) \neq 0$, la «probabilité conditionnelle de A sachant B» est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.2 Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dans ce cas,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si } P(B) \neq 0,\ P(A|B) = P(A) \\ \text{Si } P(A) \neq 0,\ P(B|A) = P(B) \end{array} \right.$$

1.3 Méthodes de calcul

Soient A et B deux évènements, et $(A_1, \cdots, A_n)$ une famille de n évènements. Les formules qui suivent sont vraies à condition que les probabilités conditionnelles soient bien définies.

— Intersection de deux évènements :

$$P(A \cap B) = \left| \begin{array}{ll} P(A|B)P(B) & \\ P(B|A)P(A) & \\ P(A)P(B) & \text{si les évènements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \end{array} \right.$$

— Intersection de n évènements :

$$\begin{aligned} P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots A_1) = P(A_n|A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1 \\ \times P(A_{n-1}|A_{n-2} \cap \cdots \cap A_1) \\ \vdots \\ \times P(A_2|A_1) \\ \times P(A_1) \end{aligned}$$

— Formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

2 Cas d'une partition de Ω

Soient $(B_1, \cdots, B_n)$ une partition de Ω et un évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Supposons les valeurs $P(B_i)$ et $P(A|B_i)$ connues pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On peut donc calculer $P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$.

PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Formule des probabilités totales

On a

$$A = (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \sqcup \cdots \sqcup (A \cap B_n) = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

et donc la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Application de la formule de Bayes

La formule de Bayes devient alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$