Exercice 1 : Chute d'une goutte d'eau (/12 pts)

Une goutte d'eau, modélisée comme une sphère de rayon $r = 2$ mm, tombe de la base d'un nuage situé à une altitude de valeur $y(0) = 1000$ m au-dessus du sol. L'origine des dates est l'instant où la goutte quitte le nuage, sa vitesse initiale est nulle.

Données :

- Intensité du champ de pesanteur terrestre $g \approx 10$ m.s^{-2}
- Masse volumique de l'air : $\rho_{air} \approx 1$ kg.m^{-3}
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} \approx 1000$ kg.m^{-3}
- Volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

1. Enoncer le principe fondamental de la dynamique et l'utiliser, en justifiant l'ensemble des étapes, afin d'obtenir l'expression de l'accélération. Durant cette partie nous considèrerons que la seule force s'exerçant sur la goutte de pluie est son poids $\vec{P}$. (1pt)

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow -P = ma \Rightarrow -mg = ma \Rightarrow -g = a$$

2. A partir de l'expression précédente, donner l'expression du vecteur vitesse. (1pt)

$$\overrightarrow{v(t)} = \int a(t).dt\,\overrightarrow{u_y} = \int -g\ dt\overrightarrow{u_y} = -gt\overrightarrow{u_y} + c_1$$

Ici, la vitesse initiale est nulle, donc $c_1 = 0$.

3. A partir de l'expression précédente, donner l'expression du vecteur position. (1pt)

$$\vec{y}(t) = \int v(t).dt\overrightarrow{u_y} = \int -gt\ dt\,\overrightarrow{u_y} = \left(-\frac{gt^2}{2} + c_2\right)\overrightarrow{u_y}$$

Ici, la hauteur initiale est de 5m. Donc $y(0) = 1000$, soit $c_2 = 1000$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + 1000$$

4. Calculer la valeur de la vitesse de la goutte lorsqu'elle atteint le sol en utilisant les équations établies aux questions précédentes. (1pt)

Nous pouvons déterminer plusieurs paramètres du mouvement, par exemple, la durée de la chute : on cherche à savoir quand l'objet touche le sol, c'est-à-dire, quand y(T)=0.

$$y(T) = -\frac{gT^2}{2} + 2000 = 0 \text{ soit } T = \sqrt{\frac{4000}{10}} = \sqrt{400} = 20\ s$$

$$\|v(40)\| = gt = 10 \times 20 = 200\ m/s$$

5. Réaliser le même calcul à partir du théorème de l'énergie mécanique. (2pts)

$$E_M = E_c + E_p = cte$$

Soit :

$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f}$$

$$0 + E_{p,i} = E_{c,f} + 0$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{40000} \approx 200\ m/s$$

6. En réalité, la goutte arrive sur le sol avec une vitesse de valeur v = 9,4 m/s. Comment expliquer la différence entre cette valeur et celle prévue à la question 2 ? (0,5pt)

Il faut tenir compte des frottements.

La force de frottement qu'exerce l'air sur la goutte de pluie n'est pas négligeable. Elle vaut : $\vec{f} = -k\vec{v}$; avec dans cette situation : $k = 2{,}4.10^{-5} N.s.m^{-1}$.

7. En appliquant principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle satisfaite par v_y. (2pts)

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$$

$$-g - \frac{kv}{m} = a$$

$$g - \frac{kv}{m} = \frac{dv}{dt} \text{ soit } \frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = -g$$

8. Vérifier que l'expression suivante est bien une solution de l'équation différentielle $v_y(t) = \frac{gm}{k}\left(e^{-kt}/m - 1\right)$ et qu'elle respecte la condition initiale sur $v_y(0)$: (1,5pt)

Calculons :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gm}{k}.\frac{k}{m}e^{-\frac{kt}{m}} = -ge^{-kt/m}$$

Remplaçons dans l'équa diff :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = -g$$

$$-ge^{-\frac{kt}{m}} + \frac{k}{m}\left(\frac{gm}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)\right) = -g$$

$$-ge^{-\frac{kt}{m}} + \left(g\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)\right) = -g$$

Vrai

9. Donner l'expression littérale de τ et calculer sa valeur. (1pt)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 8.10^{-9} = 2{,}4 \times 10^{-8}\ m^3$$

Masse :

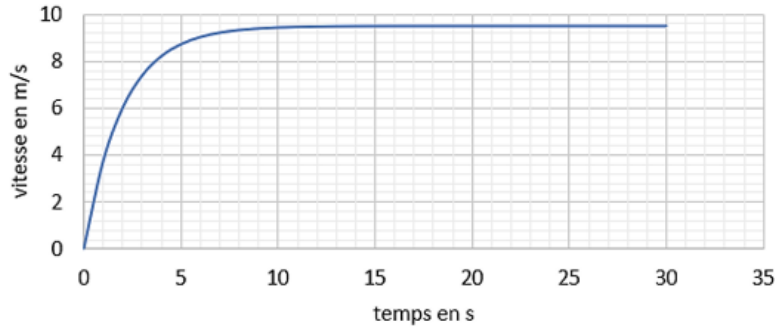
$$m = \rho V = 2{,}4 \times 10^{-5} kg$$

Donc :

$$\frac{m}{k} = 1$$

10. Voici la représentation graphique de la vitesse de la goutte en fonction du temps :

D'après le graph on trouve une vitesse d'environ 3,2m/s.



11. Quelle vitesse atteint finalement la goutte d'eau ? (1pt)

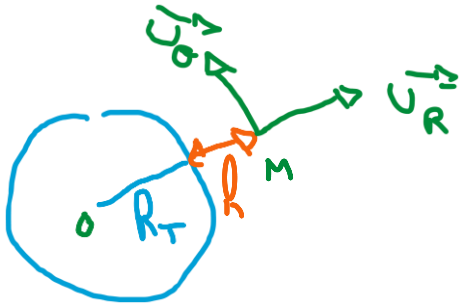
D'après le graph on trouve une vitesse d'environ 9,5m/s.

Exercice 2 : Mouvement de la station spatiale internationale (ISS) (/8pts)



L'ISS est une station spatiale placée en orbite terrestre basse à environ 400 km du sol. Sa masse est d'environ 400 tonnes ce qui en fait l'objet artificiel le plus lourd tournant autour de notre planète. Nous allons étudier le mouvement de l'ISS. On suppose le mouvement circulaire et la vitesse angulaire ω constante

1. Tracer un schéma de la situation et faire apparaitre les vecteurs de la base polaire **puis** déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en base polaire. (2pts)



$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'ISS en base polaire. (1pt)

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$= \frac{d(r.\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

2. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de l'ISS en base polaire. (1pt)

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d\,r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \left(-r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r}$$

3. Montrer que :

   On a :

   $$a = \frac{v^2}{r}$$

   Et :

   $$\|\vec{v}\| = v = r\omega$$

   Soit :

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

D'après le PFD :

$$\sum_i \vec{F_i} = m_{ISS}\vec{a}$$

$$G \times \frac{m_T \times m_{ISS}}{d^2} = m_{ISS} r\omega^2$$

(2pts)

$$\omega = \sqrt{\frac{G \times M_T}{(h + R_T)^3}}$$

4. Calculer l'ordre de grandeur de la durée d'une révolution de l'ISS autour de la Terre. (2pts)

$$\omega = \sqrt{\frac{G \times M_T}{(h + R_T)^3}} = \omega = \sqrt{\frac{6.10^{-11} \times 6{,}4.10^{24}}{(6{,}8.10^6)^3}} \approx \sqrt{\frac{3{,}6.10^{14}}{3{,}5.10^{20}}} \approx \sqrt{10^{-6}} \approx 10^{-3}\ rad/s$$

Soit une rotation en :

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28.10^3 = 6280s = 1{,}4h$$