Physique : S1

Partie 1 : Introduction à la mécanique classique

I. Cinématique :

La cinématique est une branche de la mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les ont produits. Dans ce chapitre, nous commencerons par définir les outils nécessaires à la description géométrique du problème, puis nous étudierons les grandeurs physiques qui caractérisent les mouvements.

1. Quelques définitions :

Définition 1 : Point matériel

Un point matériel est un système dont on peut négliger à la fois l'extension spatiale et la rotation sur lui-même. Cela dépend donc du problème :

- La Terre, si on considère son mouvement autour du Soleil, a un rayon négligeable par rapport à la distance Terre-Soleil : on peut la considérer comme un point matériel.
- La Terre, si on considère son mouvement de rotation propre pour étudier, par exemple, la durée du jour, ne peut évidemment pas être considérée comme un point matériel : son extension spatiale est un paramètre important.

Définition 2 : Référentiel

C'est le repère d'espace et de temps choisi. Par exemple, on peut choisir un référentiel terrestre, géocentrique ou héliocentrique. Un référentiel est dit galiléen s'il ne subit aucune accélération.

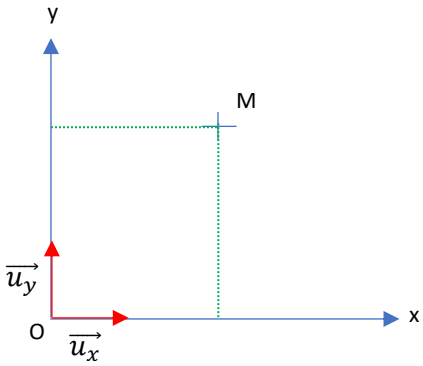
Définition 3 : Système de coordonnées

Pour repérer un point M dans l'espace, on utilise un système de coordonnées. Il en existe plusieurs, plus ou moins adapté, chacun, à une géométrie particulière.

2. Les différents systèmes de coordonnées :

a. Coordonnées cartésiennes :

Dans le système de coordonnées cartésiennes, on place le point O au croisement des deux axes. Le repère est muni de 2 vecteurs fixes unitaires : $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ tels que $(\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y})$ forme une base orthonormée directe. Le point M est repéré par deux paramètres x et y, où :



- x est le projeté de M sur l'axe (O, $\overrightarrow{u_x}$)
- y est le projeté de M sur l'axe (O, $\overrightarrow{u_y}$)

Le vecteur position, qui permet de repérer le point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

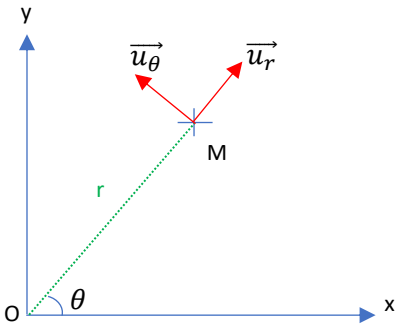
Le système de coordonnées cartésiennes est adapté à l'étude de la majorité des mouvements plans, à l'exception des mouvements circulaires.

b. Coordonnées polaires :

Dans le système de coordonnées polaires, le point O est à l'origine du repère. Le point M est repéré par 2 paramètres :

- La distance entre le point M et l'origine du repère O. Ce paramètre est noté r, il est toujours strictement positif, puisqu'il correspond à une distance.
- L'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe $\overrightarrow{u_x}$, noté θ

On définit une base de projection mobile $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta})$ orthonormée directe telle que :



- $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est une vecteur unitaire obtenu à partir de $\overrightarrow{u_r}$, en réalisant une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct

Le vecteur position, qui permet de repérer le point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système de coordonnées polaire est adapté à l'étude des mouvements circulaires.

c. Passage de la base polaire à la base cartésienne :

Il est possible d'exprimer les vecteurs de la base polaire en base cartésienne :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta.\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,.\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\,\theta.\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,.\overrightarrow{u_y}$$

3. Vecteur vitesse et accélération :

a. Définitions générales :

Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

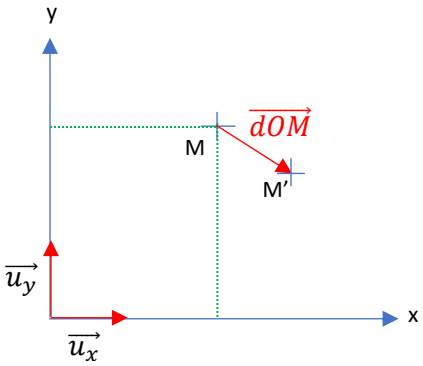
$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La vitesse est colinéaire au déplacement : elle est donc parallèle à la trajectoire. La norme des vitesses se mesure en $m.s^{-1}$. Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La norme des accélérations se mesure en $m.s^{-2}$.

b. Coordonnées cartésiennes :



D'après la figure ci-contre, nous pouvons voir que le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire :

$$d\overrightarrow{OM} = dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y}$$

Le vecteur vitesse peut donc s'écrire :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$$

Sa norme vaut : $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

De la même manière, le vecteur accélération peut s'écrire :

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{x}.\overrightarrow{u_x} + d\dot{y}.\overrightarrow{u_y}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{d\dot{y}}{dt}\overrightarrow{u_y} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}$$

Le signe du produit scalaire $\vec{v}.\vec{a}$ donne le sens de $\vec{a}$ par rapport à $\vec{v}$. L'accélération peut avoir deux effets : modifier la vitesse ou modifier la trajectoire. Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires, alors la trajectoire n'est pas modifiée. De plus :

- Si $\vec{v}.\vec{a} > 0$ alors les 2 vecteurs sont dans le même sens : le mouvement est accéléré.
- Si $\vec{v}.\vec{a} = 0$ alors les 2 vecteurs sont orthogonaux : seule la trajectoire est modifiée. $(\vec{a} \neq \vec{0})$
- Si $\vec{v}.\vec{a} < 0$ alors les 2 vecteurs sont de sens opposés : le mouvement est décéléré.

c. Coordonnées polaires :

Dans la base de coordonnées polaires, on voit que quand le point M se déplace alors r et θ varient. Une variation de θ fait tourner la base mobile d'un angle dθ ! Cela change complètement la façon de traiter le problème, car la dérivée des vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ n'est pas nulle.

Reprenons les expressions des vecteurs écrivons $\overrightarrow{u_r}$ $\overrightarrow{u_\theta}$ en base cartésienne et dérivons ces expressions par rapport à θ :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = -\sin\,\theta.\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,.\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta.\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\,.\overrightarrow{u_y} = -\overrightarrow{u_r}$$

Nous pouvons en déduire les dérivées par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

Au final :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r.\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

II. Dynamique :

La dynamique du point est une branche de la physique qui étudie les causes du mouvement. Ce domaine fut défriché par Newton, dont nous étudierons les 3 principes, c'est-à-dire, des postulats non démontrables. Newton, en mathématisant la physique et en la mettant en équation, la fit complétement changer de paradigme.

1. Quelques définitions :

Définition 4 : Masse

La masse **m** est une grandeur qui permet de mesurer la capacité d'un corps à résister à sa mise en mouvement. Elle se mesure en kg, et est proportionnelle à la quantité de matière d'un corps.

Définition 5 : Force

La force $\vec{F}$ est une grandeur vectorielle décrivant une interaction et sa capacité à modifier un mouvement. Elle s'exprime en Newton (N) (en SI : $kg.m.s^{-2}$)

Définition 6 : Quantité de mouvement

Pour formuler ses principes, Newton a introduit une nouvelle grandeur vectorielle : la quantité de mouvement. Elle est définie de la manière suivante : $\vec{p} = m.\vec{v}$ et se mesure en $kg.m.s^{-1}$

2. Le premier principe :

Le premier principe, ou principe d'inertie est le suivant : dans un référentiel galiléen, un point matériel ne subissant aucune interaction persiste dans son état initial. On en déduit que :

- Si le corps était au repos, il demeure au repos.
- Si le corps étant en mouvement, son mouvement est rectiligne uniforme.

3. Le deuxième principe :

Le deuxième principe, ou principe fondamental de la dynamique (PFD), est le suivant : dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps est égale à la somme des forces. Dans le cadre de notre cours, la masse étant constante, cela peut se s'écrire :

$$\sum_i \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

4. Le troisième principe :

Le troisième principe, ou principe d'action réaction est le suivant : si un point matériel M_1 exerce une force $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ sur le point matériel M_2, alors le point M_2 exerce sur M_1 une force $\overrightarrow{F_{2\to1}} = -\overrightarrow{F_{1\to2}}$

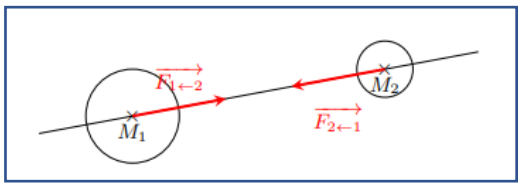
III. Quelques exemples de forces :

a. Généralités :

Une force se modélise à l'aide d'un vecteur $\vec{F}$ noté dont :

- La norme représente l'intensité de la force en Newton (N)
- La direction représente la direction de la force
- Le sens représente le sens de la force
- L'origine est le point d'application de la force : elle est donc sur l'objet qui subit la force

b. La gravitation :



L'interaction gravitationnelle est une force qui a pour effet d'attirer deux corps l'un vers l'autre. Elle est toujours attractive, et s'exerce à une portée infinie. Son expression est :

$$\vec{F}_{1\to2} = G.\frac{m_1 m_2}{d^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

Où :

- G est la constante de gravitation universelle, et vaut : G = 6,67 x 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}
- m_1 *et* m_2 sont respectivement les masses des deux corps (en kg)
- d est la distance entre les deux corps (en m)

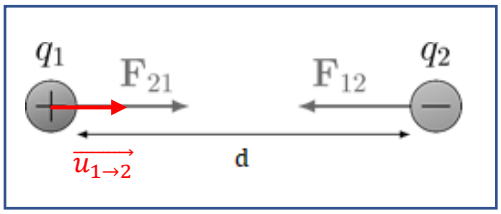
Au voisinage de la surface de la Terre, on peut assimiler cette force gravitationnelle à la force de pesanteur, appelée poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur, dont la norme vaut approximativement : g = 9,81 m.s^{-2}

On retrouve cela par calcul en utilisant le formule de la force gravitationnelle et en prenant la masse de la Terre pour $\boldsymbol{m_1}$ et le rayon terrestre pour **d**.

c. Force électrostatique :



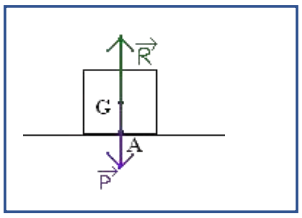
La force électrostatique, ou force de Coulomb, est une force qui s'exerce entre 2 particules chargées. C'est l'analogue à l'attraction gravitationnelle mais pour les charges électriques :

$$\overrightarrow{F_{1\to2}} = k.\frac{q_1 q_2}{d^2}\ \overrightarrow{u_{1\to2}}$$

Où k est la constante de coulomb, et vaut environ : k = 8,88 x 10^9 N.m².C^{-2}

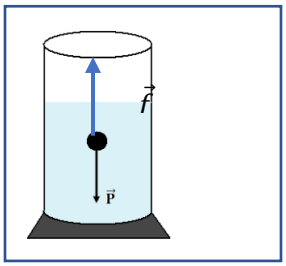
A noter que, contrairement à la masse, la charge électrique peut être négative : il en résulte que la force de Coulomb peut aussi bien être attractive que répulsive.

d. Réaction du support :



Un objet en contact avec un support subira une force dite de réaction normale, notée $\vec{R}$. C'est cette force qui empêche l'objet de traverser le support. Il n'existe pas d'expression générale pour cette force, il faut donc la déterminer au cas par cas. Elle est toujours orthogonale au support.

e. Force de frottement :

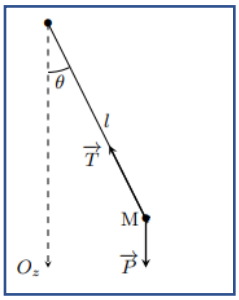


Un système en mouvement à une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide, subira une force de frottement fluide $\vec{f}$:

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

Avec α le coefficient de frottement dépendant du fluide, de la forme du corps, de la vitesse… Cette force s'oppose toujours au mouvement.

f. Tension d'un fil :

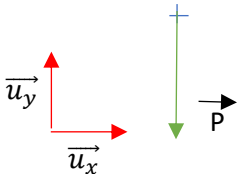


Un fil accroché à un objet exercera une force sur ce dernier, dont on ne peut établir une expression générale. Néanmoins, cette force est une force de contact qui s'applique au point d'attache du fil, ayant pour direction le fil et orientée de l'objet vers le fil. La norme, elle, reste à être déterminée au cas par cas. Cette force trouve son origine dans l'interaction électromagnétique entre les particules.

IV. Exploitation du deuxième principe :

L'intérêt du PFD est de pouvoir déterminer les équations du mouvement à condition de connaître les forces s'exerçant sur le système. Prenons le système le plus simple possible : un point matériel M de masse m en chute libre d'une hauteur initiale $y_0 = 5$m, sans vitesse initiale.

Exercice d'application : Chute libre



- Référentiel : terrestre
- Système : Point matériel M de masse m
- Bilan des forces : poids

Partons du PFD :

$$\sum_i \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow -P = ma \Rightarrow -mg = ma \Rightarrow -g = a$$

On peut remarquer que l'accélération ne dépend pas de la masse de l'objet ! En repartant de la définition de l'accélération, on trouve :

$$v(t) = \int a(t).dt = \int -g\ dt = -gt + c_1$$

Ici, la vitesse initiale est nulle, donc $c_1 = 0$. Déterminons maintenant la position :

$$y(t) = \int v(t).dt = \int -gt\ dt = -\frac{gt^2}{2} + c_2$$

Ici, la hauteur initiale est de 5m. Donc y(0) = 5, soit $c_2 = 5$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + 5$$

Nous pouvons déterminer plusieurs paramètres du mouvement, par exemple, la durée de la chute : on cherche à savoir quand l'objet touche le sol, c'est-à-dire, quand y(T)=0.

$$y(T) = -\frac{gT^2}{2} + 5 = 0 \text{ soit } T = \sqrt{\frac{10}{g}} = \sqrt{\frac{10}{9{,}81}} \approx 1\ s$$

Pour déterminer la vitesse de l'objet quand il touche le sol, prenons l'expression de v en prenant t=1s :

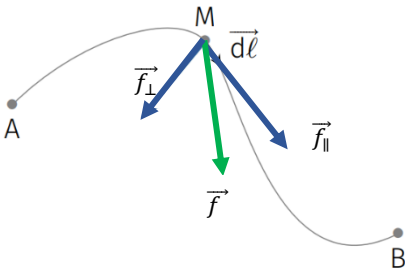
$$v(1) = -gt = -9{,}81\ m.s^{-1}$$

V. Etude énergétique :

Il arrive que le principe fondamental de la dynamique ne soit pas suffisant pour résoudre les équations du mouvement. Dans ces cas-là, nous pouvons utiliser une approche complémentaire : l'étude énergétique.

1. Travail d'une force :

Lorsqu'une force s'exerce sur un système, il est possible de la décomposer en deux composantes : une perpendiculaire $\overrightarrow{f_\perp}$ à la trajectoire et une seconde qui lui est parallèle $\overrightarrow{f_\parallel}$. (voir figure ci-contre) La première est responsable de la modification de la trajectoire, la seconde, de la variation de vitesse. Pour mesurer à quel point cette force $\overrightarrow{f_\parallel}$ travaille à ralentir ou accélérer le système, on définit une nouvelle grandeur : le travail.



Définition 7 : Travail

Le travail mesure la capacité d'une force à faire varier la vitesse d'un système. Il se mesure en Joule et se calcule de la manière suivante :

$$W_{A\to B} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f}.\overrightarrow{dl}$$

Le vecteur $\overrightarrow{dl}$ représente le déplacement infinitésimal du point M le long de la trajectoire courbe. Le travail est une intégrale curviligne qui dépend, a priori, à la fois de la force et du trajet. On distingue trois cas :

- W > 0 : le travail est moteur, le système accélère
- W $= 0$: la force incurve la trajectoire sans modifier la norme de la vitesse
- W < 0 : le travail est résistant, le système ralentit

Si la force est constante, alors l'équation peut s'écrire :

$$W_{A\to B} = \vec{f}.\overrightarrow{AB}$$

2. Puissance d'une force :

Afin de mesurer à quelle vitesse travaille une force, le concept de puissance a été développé, tout comme en électricité la puissance électrique décrit la vitesse à laquelle l'énergie est débitée.

Définition 8 : Puissance

La puissance est une grandeur qui s'exprime en W ou en J/s :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{f}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$$

Où $\vec{v}$ est ma vitesse du système

3. Théorème de l'énergie cinétique :

Le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.) est un théorème permettant de relier le travail des forces avec l'énergie cinétique qui représente la quantité d'énergie d'un système liée à son mouvement. Pour rappel, l'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Le théorème de l'énergie cinétique stipule que :

$$\sum_i W_i = \Delta Ec = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Ou, en faisant intervenir la puissance :

$$\sum_i P_i = \frac{dEc}{dt}$$

Exercice d'application : Chute libre

Prenons l'exemple de la chute libre : un corps de masse m chute, uniquement soumis à son poids et sans vitesse initiale d'une hauteur H. Le T.E.C s'écrit :

$$\sum_i \overrightarrow{W_i} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 = P.H = m.g.H$$

La vitesse quand l'objet touche le sol est :

$$v = \sqrt{(2gH)}$$

4. Energies potentielles :

Une force est conservative lorsque son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position de ces deux points. Elle dérive alors d'une énergie potentielle, grandeur qui caractérise énergétiquement le point M dans chaque position. On écrit :

$$W = -\Delta E_p$$

Avec Ep l'énergie potentielle de pesanteur. C'est une forme d'énergie dont dispose tout objet pouvant chuter d'une certaine hauteur et qui vaut :

$$E_p = m.g.h$$

Avec h la hauteur du système par rapport au sol.

5. Théorème de l'énergie mécanique :

Pour tout système conservatif, la quantité, appelée énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles, se conserve au cours du mouvement. On peut donc écrire :

$$E_M = E_c + E_p = cte$$

Les forces de frottement sont des forces non conservatives : elles dissipent l'énergie du système.

6. Bilan :

Définition 9 : Théorèmes

Le théorème de l'énergie cinétique est :

$$\sum_i W_i = \Delta Ec = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Le théorème de l'énergie mécanique est :

$$E_M = E_c + E_p = cte$$

Partie 2 : Systèmes oscillants :

I. Le modèle de l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est un modèle décrivant un oscillateur idéal où les frottements sont négligés, et, par conséquent, dont l'amplitude est constante au cours du temps. Ce modèle est utilisé dans de nombreux domaines de la physique : mécanique classique, électricité, électronique, optique, acoustique, mécanique quantique…

1. Bilan des forces :

Dans la suite du cours, nous considèrerons l'oscillateur suivant, composé d'une masse $\boldsymbol{m}$ en un point $\boldsymbol{M}$ attaché à un ressort de longueur à vide l_0 et soumis aux trois forces suivantes :

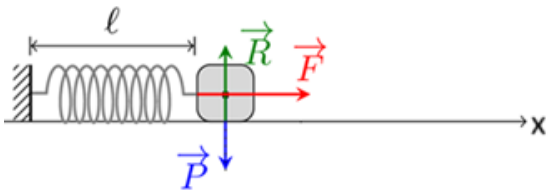


Figure 1 : Bilan des forces pour un ressort. (Source)

- Le poids $\vec{P}$, force verticale dirigée vers le bas
- La réaction du support $\vec{R}$, force verticale dirigée vers le haut
- La force de rappel $\vec{F}_{rappel}$, force horizontale dirigée soit à gauche soit à droite selon l'allongement du ressort.

La force de rappel est une force proportionnelle à l'allongement Δl du ressort et à une constante k qui caractérise sa raideur et qui s'exprime en N/m. Son expression est la suivante :

$$\vec{F}_{rappel} = -k \times \Delta l \times \overrightarrow{u_x}$$

Avec :

- $\Delta l = l - l_0$
- La grandeur l_0 correspond à la longueur du ressort au repos.
- La grandeur l correspond à la longueur du ressort au moment t considéré.

Intéressons-nous au sens de la force de rappel. On place l'origine de l'axe x point où le ressort et dans sa position de repos, c'est-à-dire où l'allongement est nul. Deux cas sont possibles hors équilibre :

- Soit $\Delta l < 0$: le ressort est comprimé et la force est dirigée dans le même sens que l'axe.
- Soit $\Delta l > 0$: le ressort est étiré et la force est dirigée dans le sens contraire à celui de l'axe.

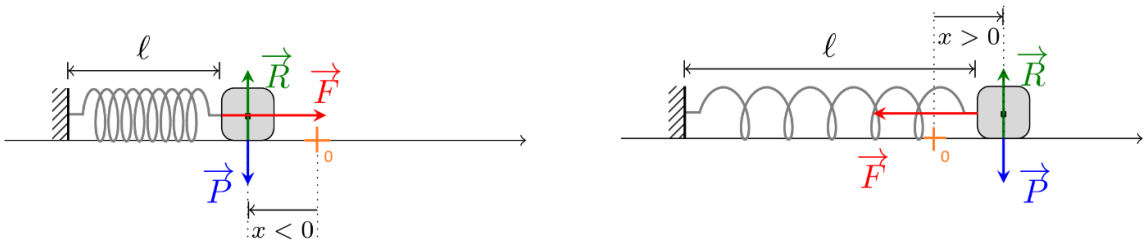


Figure 2 : Cas du ressort comprimé (à gauche) et du ressort étiré (à droite) (Source)

Si on place l'origine de notre axe au point d'équilibre du ressort, comme sur les figures ci-dessus, alors on obtient les résultats suivants :

- Au repos : $\Delta l = l - l_0 = 0$
- Dans tous les cas : $\Delta l = x$

On remarque bien que si l'allongement du ressort est positif (fig. de droite) alors la force de rappel est négative et dirigée vers la gauche. De plus, si l'allongement du ressort est négatif (fig. de gauche) alors la force de rappel est positive et dirigée vers la droite.

2. Application de la 2nd loi de Newton :

Appliquons la deuxième loi de Newton puis projetons la sur la base de projection choisie :

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{rappel} = m\vec{a}$$

En projetant cela sur l'axe x nous obtenons :

$$0 + 0 - kx = m\ddot{x}$$

Soit, en l'écrivant d'une autre façon :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

L'équation obtenue se nomme équation différentielle d'ordre 2. On l'écrit généralement de la manière suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Où ω_0 est la pulsation propre du système.

3. Résolution de l'équation différentielle :

Nous devons maintenant trouver la fonction x(t) qui vérifie l'équation différentielle. La solution n'est pas unique : il faudra s'aider des conditions initiales pour trouver celle qui convient. Nos conditions initiales sont les suivantes :

- La position initiale x_0 exprimée en mètre
- La vitesse initiale v_0 exprimée en mètre par seconde

Dans la suite, nous considèrerons qu'une fonction de la forme suivante est solution de l'équation différentielle :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\ sin(\omega_0 t)$$

<u>Cas 1 : On lâche le ressort sans vitesse initiale d'une position x_0 où le ressort est étiré :</u>

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\ sin(\omega_0 t)$$

Avec la condition initiale sur la position :

$$x(0) = A\cos(0) + B\ sin(0) = A = x_0$$

Nous obtenons donc :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + B\ sin(\omega_0 t)$$

De plus, en dérivant l'expression, on obtient :

$$\dot{x}(t) = -x_0\ \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\ \omega_0\ cos\ (\omega_0 t)$$

Avec la condition initiale sur la vitesse :

$$\dot{x}(t) = -x_0\ \omega_0 \sin(0) + B\ \omega_0 \cos(0) = B = 0$$

Il nous reste alors :

$$\dot{x}(t) = -x_0\ \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Dérivons encore une fois l'expression :

$$\ddot{x}(t) = -\ x_0\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\ x(t)\ \omega_0^2$$

Ce qui correspond bien à notre équation différentielle. On remarque que l'oscillateur oscille entre $-x_0$ et x_0 : c'est cohérent avec notre modèle sans frottement.

Cas 2 : On lâche le ressort avec une vitesse initiale v_0 d'une position $x_0 = 0$:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\ sin(\omega_0 t)$$

Avec la condition initiale sur la position :

$$x(0) = A\cos(0) + B\ sin(0) = A = 0$$

Nous obtenons donc :

$$x(t) = B\ sin(\omega_0 t)$$

De plus, en dérivant l'expression, on obtient :

$$\dot{x}(t) = B\ \omega_0\ cos\ (\omega_0 t)$$

Avec la condition initiale sur la vitesse :

$$\dot{x}(t) = B\ \omega_0 \cos(0) = B\omega_0 = \ v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Il nous reste alors :

$$\dot{x}(t) = v_0\ \ cos\ (\omega_0 t)$$

Dérivons encore une fois l'expression :

$$\ddot{x}(t) = -\ v_0\ \omega_0 \sin(\omega_0 t) = -\ x(t)\ \omega_0^2$$

Ce qui correspond bien à notre équation différentielle. On remarque que l'oscillateur oscille entre -$\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\frac{v_0}{\omega_0}$: c'est cohérent avec notre modèle sans frottement.

On peut vérifier aisément que la solution suivante, qui est la somme des deux précédentes, est aussi solution de l'équation différentielle et qu'elle vérifie les conditions initiales (x_0, v_0) :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\ sin(\omega_0 t)$$

Définition 10 : Solution de l'oscillateur harmonique

La solution générale de l'oscillateur harmonique est :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + \ B\ sin(\omega_0 t)$$

Où A et B sont des constantes définies par les conditions initiales. Cette solution peut aussi s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Où A et ϕ sont des constantes définies par les conditions initiales. Dans ce cas A est l'amplitude du mouvement exprimée en mètre et ϕ la phase à l'origine exprimée en radian.

4. Allure de la solution :

Les oscillations du point M sont sinusoïdales d'amplitude x_0 et de période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

L'oscillateur est qualifié d'harmonique car ses oscillations sont d'amplitude constante, et de période propre également constante dont la valeur ne dépend que des caractéristiques du système solide-ressort.

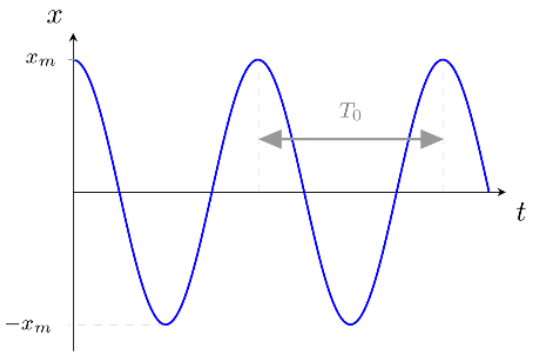


Figure 3 : Représentation des oscillations (Source)

5. Lien avec l'énergie :

L'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique s'écrit de manière classique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

L'oscillateur possède aussi, si un ressort est présent dans le système, d'énergie potentielle élastique, s'exprimant de la manière suivante :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k\, x^2$$

On peut réécrire ces énergies en utilisant les expressions spécifiques à l'oscillateur harmonique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2}\, kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2}\, kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

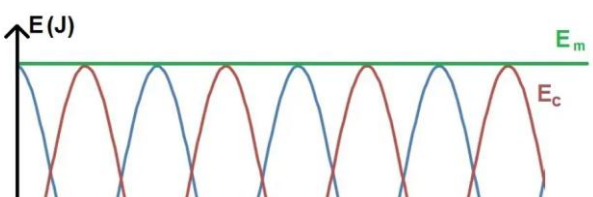
L'énergie mécanique peut donc s'écrire sous la forme :

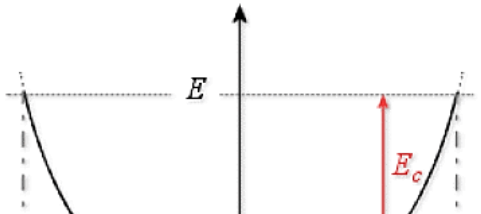
$$E_M = \frac{1}{2}\, kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}\, kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$E_M = \frac{1}{2}\, kA^2 (\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi))$$

$$E_M = \frac{1}{2}\, kA^2$$

On remarque donc que l'énergie totale d'un oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude.





II. Le pendule avec frottement fluide :

1. Description du modèle et équation différentielle :

La masse accrochée au ressort est maintenant soumise en plus des forces déjà évoquées à une force de frottement fluide (ex : avec l'air) d'expression $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

Appliquons la 2nd loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{rappel} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$0 + 0 - kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cette équation différentielle du 2nd degré se note habituellement sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Où τ est un temps caractéristique du système et vaut : $\tau = \frac{m}{\alpha}$

La résolution de cette équation différentielle du second ordre ne rentre pas dans le cadre ce cours, nous ne nous intéresserons uniquement aux solutions. Il existe trois familles de solutions différentes selon les valeurs des paramètres λ et ω_0.

2. Le régime pseudo-périodique :

La solution obtenue si $\lambda < \omega_0$ est :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\big(A\,cos(\omega t) + B\,sin(\omega t)\big)$$

On remarque une forte similitude avec le régime périodique, il y a néanmoins un facteur exponentiel qui apparait. Celui-ci est responsable d'une chute rapide de la fonction $x(t)$. Le paramètre ω et nommé pseudo-pulsation.

3. Le régime apériodique :

La solution obtenue si $\lambda > \omega_0$ est :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

On remarque qu'il n'y a plus de terme périodique : la solution n'est rien d'autres que deux exponentielles dont les facteurs r_1 et r_2 sont négatifs.

4. Le régime apériodique critique :

La solution obtenue si $\lambda = \omega_0$ est :

$$x(t) = (A + Bt)e^{\omega_0 t}$$

On remarque qu'il n'y a plus de terme périodique : c'est le retour à l'équilibre le plus rapide parmi l'ensemble des solutions.

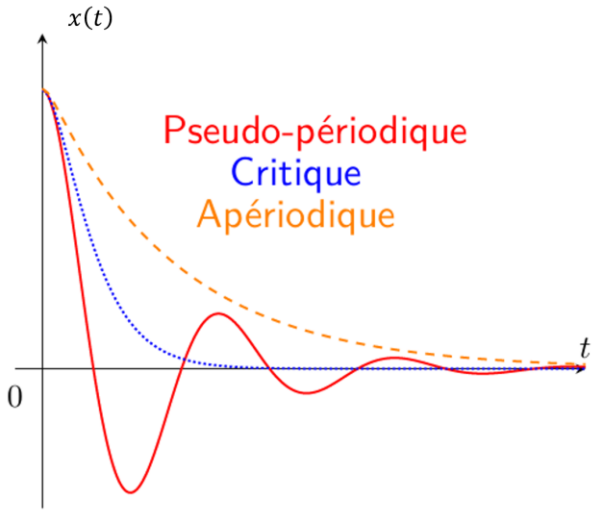


Figure 5 : Représentation des énergies cinétique, potentielle et mécanique dans le cas du ressort pour les différents régimes possibles. (Source)

Partie 3 : Ondes et signal

Un signal est une information dépendante du temps ou de l'espace. Les chercheurs, pour résoudre un problème, ont besoin d'extraire un signal (mesure d'une grandeur physique, par exemple) afin de l'observer. A l'air du numérique, les grandeurs physiques sont souvent converties en signal électrique : accéléromètre de téléphone, microphone, GPS, capteur CCD d'un appareil photographique…

I. Qu'est-ce qu'un signal ?

Un signal est une grandeur physique dépendante du temps. Dans ce cours, nous nous limiterons à un cas particulier : les signaux périodiques, qui se répètent, identiques à eux-mêmes, au cours du temps. Un signal est modélisé par une fonction du temps et une variable spatiale. Nous utiliserons les grandeurs suivantes afin de la caractériser :

- Amplitude : **A**
- Une célérité (vitesse) : **c**
- Longueur d'onde : $\boldsymbol{\lambda = \frac{c}{f}}$
- Période temporelle : $\boldsymbol{T}$
- Fréquence : $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$

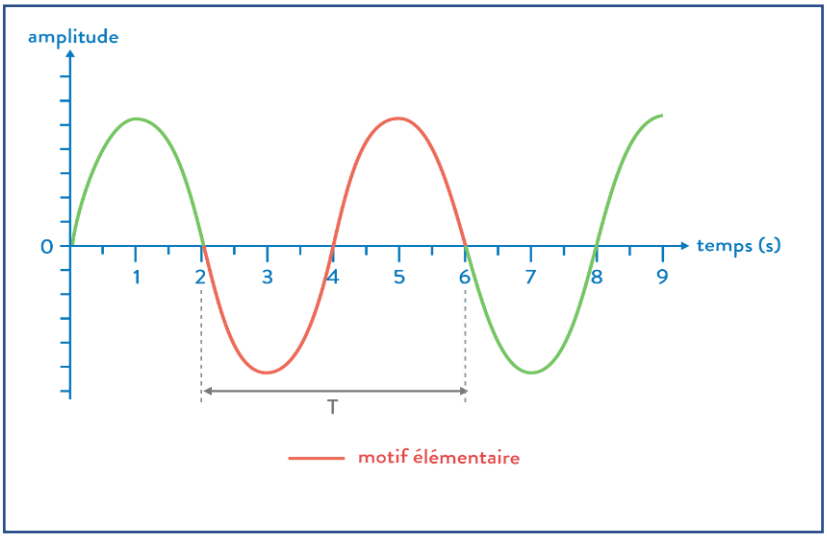


Figure 6 : Représentation temporelle d'un signal périodique

Type de signal	Grandeur physique associée	Gammes de fréquence
Electrique	Courant, tension	
Acoustique	Pression, vitesse	20 Hz – 20 kHz (oreille humaine), infrason(<20Hz), ultrason(>20kHz)
Electromagnétique	Champs électrique, champ magnétique	10^{14} à 10^{15} Hz

II. Les ondes : modélisation mathématique

Afin de modéliser une onde, c'est-à-dire un signal périodique, nous utiliserons des fonctions mathématiques périodique bien connue : le cosinus et le sinus.

Définition :

On nomme onde un phénomène physique au cours duquel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans déplacement de matière. La vitesse de déplacement est nommée célérité. Cette grandeur est notée c.

L'expression générale d'une onde progressive se déplaçant le long d'un axe Ox dans le sens des x croissant à la célérité c peut s'écrire : $s(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$.

L'expression générale d'une onde progressive se déplaçant le long d'un axe Ox dans le sens des x décroissant à la célérité **c**, elle s'écrit : $s(x,t) = f(t + \frac{x}{c})$.

Afin de pouvoir modéliser l'onde, il nous faut encore faire quelques hypothèses simplificatrices :

- L'onde se propage dans une unique dimension : on parle **d'onde plane progressive**
- L'onde est parfaitement sinusoïdale : on parle **d'onde monochromatique**

Dans la suite, nous parlerons donc d'onde plane progressive monochromatique, notée **OPPM.**

Définition :

L'expression mathématique d'une OPPM se propageant le long de l'axe Ox dans le sens des x croissant et à la célérité c peut s'écrire : $\boldsymbol{s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)}$

Avec :

- L'amplitude maximale A
- La pulsation temporelle $\omega = 2\pi f$
- La pulsation spatiale $k = \frac{\omega}{c}$
- La phase à l'origine ϕ

La différence de phase ou déphasage $\Delta\phi$ d'un signal $s_2(t)$ par rapport à un signal $s_1(t)$ est donnée par la relation :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\omega\Delta t$$ avec Δt le retard temporel du signal $s_2(t)$ sur le signal $s_1(t)$

- Si $\Delta\phi > 0$ alors le signal $s_2(t)$ est en avance de phase sur le signal $s_1(t)$.
- Si $\Delta\phi < 0$ alors le signal $s_2(t)$ est en retard de phase sur le signal $s_1(t)$.

On distingue quelques cas particuliers de déphasage :

- Si $\Delta\phi = 0$ les signaux sont en phase.
- Si $\Delta\phi = \pi$ les signaux sont en opposition de phase.
- Si $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ les signaux sont en quadrature de phase.

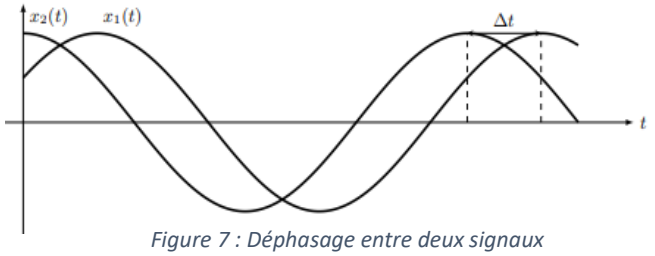


Figure 7 : Déphasage entre deux signaux

Les ondes peuvent être contraintes de diverses façons, c'est notamment le cas d'une corde de guitare qui est accrochée à ses extrémités. Les points de fixations imposent l'absence d'oscillations aux extrémités de la corde, on parle de nœuds de vibration. Lors de la modélisation mathématique, nous parlerons alors de conditions aux limites.


Figure 8 : Ondes stationnaires le long d'une corde de guitare

C'est en fait le cas dans la majorité des instruments de musique : dans une flute, le fait que le tube soit fermé ou ouvert à ses extrémités va imposer des conditions, notamment sur la pression de l'air à ces endroits.

Une onde stationnaire est caractérisée par des nœuds de vibration qui sont des points de l'espace où l'amplitude de l'onde est nulle et des ventres de vibrations qui sont des points de l'espace où l'amplitude de l'onde est maximale.

Dans les deux paragraphes précédents nous avons considéré la superposition de signaux en un point donnée, sans référence à leur dépendance spatiale. Nous allons maintenant nous intéresser à ce qu'il se passe dans une zone étendue. Nous considérerons le cas où les ondes sont de même amplitude, de même phase à l'origine et de même pulsation, mais se propagent en sens contraire. Ces deux ondes peuvent donc s'écrire de la manière suivante :

$$s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$
$$s_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$$
$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx)$$
$$s(x,t) = 2A\sin(\omega t)\sin(kx)$$

Il y a découplage entre la coordonnée de temps et d'espace.

Dans le cas d'une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités, pouvons utiliser le fait qu'à son extrémité, c'est-à-dire en x = L, on a : $s(L,t) = 0\ \forall t$. Cela n'est possible que si :

$$sin(kL) = 0 \quad soit \quad k_nL = n\pi \quad avec\ n \in \mathbb{N}$$
$$(2\pi L)/\lambda_n = n\pi \quad avec\ n \in \mathbb{N}$$
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} avec\ n \in \mathbb{N}^*$$

Dans un tel système physique, seule les ondes respectant la condition précédente peuvent exister : on parle de mode de vibration. Un mode de vibration est une onde stationnaire harmonique : tous les points du système vibrent sinusoïdalement à la même fréquence, soit en phase soit en opposition de phase.

Il existe un nombre limité de solutions, et donc, un nombre limité de modes de vibration. On le note f_n ou w_n. Le premier mode se nomme fondamental, et les suivants, harmoniques. Voici quelques exemples de mode de vibrations :

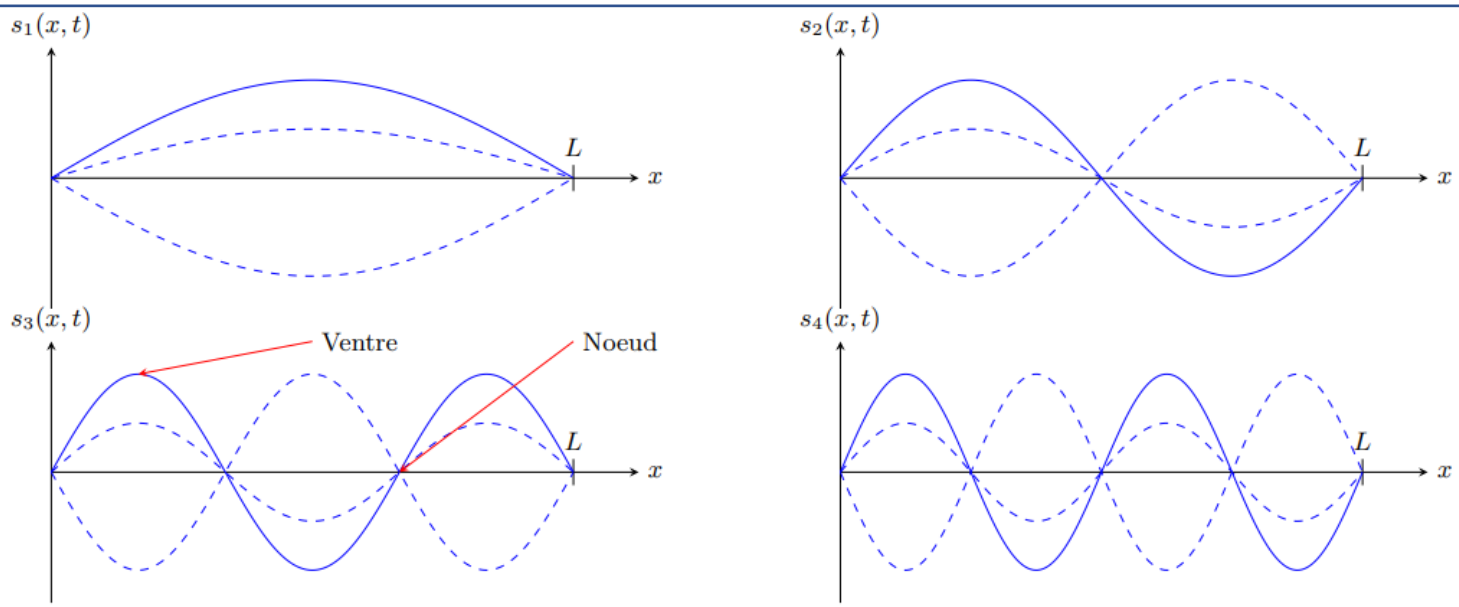


Figure 9 : Fondamental et premiers harmoniques d'une corde fixée en ses deux extrémités.